ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

2ème épreuve M — MATHEMATIQUES (4 h) — 1982

Notations et résultats admis

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{A}(\in \mathcal{L}(E))$ l'endomorphisme identité de E. $\mathcal{L}(E)$ est muni d'une norme $\|.\|$ telle que :

$$\forall\, u \text{ et } v \in \mathcal{L}(E) : \|u \circ v\| \leqslant \|u\| \cdot \|v\| .$$

On supposera que la norme $\|.\|$ sur $\mathcal{L}(E)$ est construite à partir d'une norme $|.|$ sur E en posant :

$$\|u\| = \sup_{|x|=1} |u(x)| \quad \text{pour } u \in \mathcal{L}(E)$$

Si (u_k) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$, on dira que la série $\sum_{k=o}^{\infty} u_k$ converge et a pour somme v dans $\mathcal{L}(E)$ si la suite (v_n) telle que $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ converge et a pour limite v dans l'espace normé $\mathcal{L}(E)$; on écrit alors :

$$v = \sum_{k=o}^{\infty} u_k .$$

Soit E* le dual de E ; soient $x \in E$, $y \in E^*$; $< y, x >$ est la valeur prise par y en x.

Le sujet comporte quatre parties ; seules les deux premières parties sont indépendantes l'une de l'autre.

1ère partie

Dans la partie I, R désigne un réel > o ou $+\infty$ et D_R le disque ouvert de rayon R dans $\mathbb{C}$ (si $R = +\infty$: $D_R = \mathbb{C}$) ; $f : D_R \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne une fonction développable en série entière dans le disque D_R :

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \quad \text{si } z \in D_R ,$$

(le rayon de convergence de la série entière du second membre étant $\geqslant R$).

Il sera admis : $\forall\, r \in]0, R[$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il vient :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

I - 1°) Montrer que, pour r donné $\in [0, R[$, la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par $\theta \rightsquigarrow f(r e^{i\theta})$ est bornée.

2°) Soit $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ pour $r < R$. Montrer, pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité :

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$$

3°) On suppose que $R = +\infty$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\exists\, r_o > 0$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ et $\exists\, C > 0$ tels que $\forall\, r > r_o$, $M(r) \leqslant C\, r^m$,

b) f est une fonction polynôme de degré $\leqslant m$.

Démontrer que si $|f(z)|$ est borné pour $z \in \mathbb{C}$ alors f est une fonction constante.

4°) On considère les propriétés suivantes :

c) (A_n) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $\forall\, z \in D_R$ la série $\sum_{n=o}^{\infty} z^n A_n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.

d) (A_n) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=o}^{\infty} z^n \|A_n\|$ est supérieur ou égal à R.

Etablir que (d) implique (c).

.../...

5°) Soient (A_n) et (B_n) deux suites dans $\mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété (c) ; posons pour $z \in D_R$:

$$\phi(z) = \sum_{n=o}^{\infty} z^n A_n \ , \psi(z) = \sum_{n=o}^{\infty} z^n B_n .$$

a) Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{E} \ , \ \forall y \in \mathbb{E}^* \ , \ \forall z \in D_R : < y, \phi(z)(x) > = \sum_{n=o}^{\infty} z^n < y, A_n(x) > .$$

b) Démontrer que, pour qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}$ (avec $V \subset D_R$) tel que $\phi(z) = \psi(z)$ pour $z \in V$ il faut et il suffit que les suites (A_n) et (B_n) soient identiques.

6°) Les notations étant celles de la question 5°) on pose :

$$C_n = \sum_{k=o}^{n} A_{n-k} \circ B_k \ , \quad n \in \mathbb{N} .$$

On suppose que (A_n) et (B_n) satisfont la propriété (d) plus forte que (c) , établir que pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in D_R$ on a :

$$\left\| \left(\sum_{k=o}^{n} z^k A_k \right) \circ \left(\sum_{k=o}^{n} z^k B_k \right) - \sum_{k=o}^{2n} z^k C_k \right\| \leqslant a(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k \|B_k\| + b(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^k \|A_k\|$$

où il a été posé : $a(z) = \sum_{k=o}^{\infty} |z|^k \|A_k\|$, $b(z) = \sum_{k=o}^{\infty} |z|^k \|B_k\|$,

démontrer : $\phi(z) \circ \psi(z) = \sum_{k=o}^{\infty} z^k C_k$ pour $z \in D_R$.

2ème partie

II - 1°) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et m entier > 1 fixés. Montrer qu'il existe alors une suite (ε_n) telle que :

$$\begin{cases} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|u^m\|^{\frac{1}{m}} (1 + \varepsilon_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \\ \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0 \end{cases}$$

où $u^n = u_o \ldots_o u$ (n fois). (On pourra utiliser le fait que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit sous la forme $n = q(n)\, m + r(n)$ avec $0 \leqslant r(n) < m$, $r(n)$ et $q(n) \in \mathbb{N}$).

2°) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ la limite suivante :

$$\nu(u) = \lim_{n \to \infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}$$

existe et est égale à la borne inférieure de l'ensemble des $\|u^n\|^{\frac{1}{n}}$, $n \geqslant 1$.

3°) Etablir que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, u et $v \in \mathcal{L}(E)$ on a les relations :

- $\nu(u) \leqslant \|u\|$
- $\nu(\lambda u) = |\lambda| \, \nu(u)$
- $\nu(u_o v) = \nu(v_o u)$
- $\nu(u^k) = \nu(u)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Indication : remarquer : $(u_o v)^n = u_o (v_o u)^{n-1}{}_o v$

4°) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ il vient :

. lorsque $\nu(u) < 1$, $\mathbb{1} - u$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$; la série $\sum_{n=o}^{\infty} u^n$ $(u^o = \mathbb{1})$ converge et $(\mathbb{1} - u)^{-1} = \sum_{n=o}^{\infty} u^n$.

. lorsque $\nu(u) > 1$, cette série diverge.

.../...

3ème partie

III - 1°) Montrer que pout tout $u \in \mathcal{L}(E)$ la série $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$ est convergente ($u^o = \mathbb{1}$). On notera exp : $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ la fonction telle que :

$$\exp(u) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n.$$

2°) Calculer exp(0) et exp($z\mathbb{1}$), $z \in \mathbb{C}$.

3°) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $p \in \mathbb{N}$ on pose $S_p(u) = \sum_{k=o}^{p} \frac{1}{k!} u^k$. Montrer que si u et v $\in \mathcal{L}(E)$ et u et v commutent alors $\| S_p(u) \circ S_p(v) - S_p(u+v) \| \leqslant \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k!} (\|u\| + \|v\|)^k$, et exp(u) o exp(v) = exp(u + v)

4°) Etablir que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, exp(u) est un automorphisme de $\mathbb{E}$ et $(\exp(u))^{-1} = \exp(-u)$.

5°) On désigne par C_n^k (k, n entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$) les coefficients de la formule du binôme ; établir que si k est fixé, la suite de terme général $t_n = \frac{1}{n^k} C_n^k$ pour $n \geqslant k$ croît et a pour limite $\frac{1}{k!}$. Montrer que

$$\exp(u) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{1} + \frac{1}{n} u)^n, \quad u \in \mathcal{L}(E).$$

6°) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est fixé, l'élément $(\mathbb{1} + \frac{1}{n} u)^{-n}$ est défini dès que n est un entier assez grand et que $\exp(-u) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{1} + \frac{1}{n} u)^{-n}$

4ème partie

. On considère une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ c'est-à-dire une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ ayant les deux propriétés suivantes :

(α) $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathbb{1}$.

(β) $\mathcal{A}$ est stable par composition des endomorphismes ($\forall u \in \mathcal{A}$, $\forall v \in \mathcal{A}$ il vient : $u \circ v \in \mathcal{A}$)

on dira que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ si $u \circ v = v \circ u$ lorsque u et v $\in \mathcal{A}$.

1°) Etablir que si $u \in \mathcal{A}$ alors $\exp(u) \in \mathcal{A}$

2°) Si u et v $\in \mathcal{A}$, on définit la fonction $\phi_{u,v}(z) : \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathcal{L}(E)$ par:

$$\phi_{u,v}(z) = \exp(zu) \circ v \circ \exp(-zu), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $\phi_{u,v}(z) \in \mathcal{A}$ et peut s'écrire sous la forme $\phi_{u,v}(z) = \sum_{n=o}^{\infty} z^n A_n$ où (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}$ dont on calculera les termes A_o et A_1.

3°) Etablir que, dans les conditions du 2°) on a : $\nu(\phi_{u,v}(z)) = \nu(v)$.

Indication : Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi^n_{u,v}(z) = \phi_{u,v^n}(z)$.

4°) Etablir que pour que u et v commutent, il faut et il suffit qu'il existe un réel C > 0 tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \|\phi_{u,v}(z)\| \leqslant C \|v\|.$$

Indication : Utiliser la question I - 3°)

5° Etablir que si pour tout $u \in \mathcal{A}$ on a $\|u^2\| = \|u\|^2$ alors $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. (On pourra remarquer que l'hypothèse entraîne que $\nu(u) = \|u\|$ pour $u \in \mathcal{A}$).

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail